Partiel Électromagnétisme - PEIP 2
9 novembre 2022
4 problèmes / Durée de l'épreuve 2h.
Formulaire A4 manuscrit autorisé / Calculettes standards autorisées

1. (4 pt) Électrostatique

   (a) Une charge ponctuelle q est située au centre O d'une sphère de rayon R. Si on remplace la sphère par un cube de côté R centré en O, alors le flux du champ électrique créé par la charge à travers le cube va :

   i) augmenter

   ii) diminuer

   iii) rester inchangé

   Tnat que la charge à l'intérieur est la même, le flux électrique à travers une surface fermée reste inchangé.

   (b) Un potentiel électrique dans une certaine région de l'espace s'écrit $V(x,y) = Cxy^2$ où C est une constante.

   i) Spécifier les dimensions de C_1.

   ii) Trouver le champ électrique, $\vec{E}$, associé.

   Solution :

$$\vec{E}(x,y) = -\overrightarrow{\text{grad}}V(x,y) = -\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} Cxy^2 = -C\begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \\ 0 \end{pmatrix} V(x,y) = -Cy^2\vec{u}_x - C2xy\vec{u}_y$$

   iii) Trouver la densité volumique, $\rho(x,y)$ dans la région.

   Solution :

$$\rho(x,y) = \epsilon_0 \,\text{div}\, \vec{E} = -\epsilon_0 C \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y^2 \\ 2xy \\ 0 \end{pmatrix} = -C\epsilon_0 2x$$

   (c) Le flux du champ électrique créé par une distribution de charges à travers une surface fermée (Σ) ne dépend pas des charges à l'extérieur de (Σ).

   i) Vrai.

   Le théorème de Gauss dit que le flux à traver une surface fermée n'est affecté que par la quantité de charge à intérieur de la surface.

   ii) Faux.

   (d) On considère un cylindre d'axe $(O, \vec{u}_z)$, de hauteur h et de rayon R. Dans le repère cylindrique $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\phi, \vec{u}_z)$, l'élément de surface **orienté** qui entoure un point M de la surface **latérale** s'écrit :

   i) $\overrightarrow{dS}_M = -(Rd\phi dz)\,\vec{u}_\rho$.

   ii) $\overrightarrow{dS}_M = (Rd\phi dz)\,\vec{u}_\rho$.

   iii) $\overrightarrow{dS}_M = (Rd\rho dz)\,\vec{u}_\rho$.

2. (6 pt) Potentiel, conducteurs et condensateurs **(multiple réponses correctes possibles)**

   (a) La circulation d'un champ électrostatique le long d'un contour d'un point A à un point B $\left(\int_A^B \vec{E}\cdot\vec{d\ell}\right)$: (multiple réponses correctes possibles)

   i) est égale à la différence de potentiel $V_B - V_A$ entre le point B et le point A.

   ii) est égale à la différence de potentiel $V_A - V_B$ entre le point A et le point B.

   iii) est toujours un scalaire positif.

   iv) est toujours nulle si le contour est fermé.

   (b) On considère des condensateurs de 6μF et 3μF connectés en série. La capacité équivalente vaut :

   i) 9 μF **ii)** 3 μF **iii)** 0,5μF **iv) 2 μF** Solution :

$$\frac{1}{C_{\text{eq},\parallel}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \Longrightarrow C_{\text{eq},\parallel} = 2\mu\text{F}$$

(c) On approche une première sphère métallique chargée positivement d'une deuxième sphère métallique reliée à la terre et initialement neutre.

i) Les deux sphères sont en influence totale.

ii) La seconde sphère se charge négativement

iii) Le potentiel de la première sphère reste inchangé.

iv) Le potentiel de la deuxième sphère reste inchangé.

(d) On charge un condensateur plan, puis on l'isole électriquement. Si on écarte les deux conducteurs :

i) Les charges sur les condensateurs diminuent.

ii) La tension entre les deux conducteurs augmentent.

iii) La capacité du condensateurs diminue.

(e) Un condensateur plan est composé de deux armatures de surface S séparées par une distance d.

i) Donner l'expression pour la capacité, C, du condensateur.

Solution :

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

ii) Donner l'expression pour la capacité, C, du du condensateur si le volume entre les armature est remplit par un diélectrique de constante relatif ε_r.

Solution :

$$C = \frac{\epsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$$

ii) Donner les unités de ϵ_0 en termes de Farads et une unité SI fondamentale.

Solution :

$$[C] = \mathrm{F} = \left[\frac{\epsilon_0 S}{d}\right] = [\epsilon_0]\,\mathrm{m} \Longrightarrow [\epsilon_0] = \mathrm{F.m}^{-1}$$

3. (5 pts) **Électrostatique** On considère deux charges ponctuelles : $Q_1 = 150\mu C$ aux coordonnées $P_1 = (2,3,3)$m et $Q_2 = -150\mu C$ aux coordonnées $P_2 = (5,3,7)$m. **Spécifier les unités et A.N. dans vos réponses**. rappel : $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \simeq 9.10^9$SI.

   (a) Trouver le champ $\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_1(P_2)$ créé par la particule 1 à la position de la particule 2.

   Solution :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_1(P_2) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_1 \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2}}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1}\right|^3}$$

$$\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2} = \overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{O}} + \overrightarrow{\boldsymbol{O}\boldsymbol{P}_2} = \overrightarrow{\boldsymbol{O}\boldsymbol{P}_2} - \overrightarrow{\boldsymbol{O}\boldsymbol{P}_1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{m}$$

$$\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2}\right\| = \sqrt{16+9} = 5\text{m}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{E}}_1(P_2) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q_1 \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2}}{\left|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1}\right|^3} \\ &= 9 \times 10^9 \times 150 \times 10^{-6} \frac{(3,0,4)}{5^3} = \frac{27 \times 10^4}{5} \frac{(3,0,4)}{5} \text{Vm}^{-1} \\ &= 54 \times 10^3 \frac{(3,0,4)}{5} \text{Vm}^{-1}\end{aligned}$$

   (b) Calculer la force $\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{1\to2}(P_2)$ exercée sur la particule 2.

   Solution :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{1\to2} &= Q_2 \overrightarrow{\mathbf{E}}_1(P_2) = -150 \times 10^{-6} \times 54 \times 10^3 \frac{(3,0,4)}{5} \\ &= -8,1 \times \frac{(3,0,4)}{5} \text{N} \\ \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{F}}_{1\to2}\right\| &= 8,1\text{N}\end{aligned}$$

   (c) Trouver le moment dipolaire, $\overrightarrow{\boldsymbol{p}}$ de ce système.

   Solution :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{p}} = Q_1 \overrightarrow{\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1} = 15 \times 10^{-5} \times (3,0,4)\,\text{C.m} = 75 \times 10^{-5} \times \frac{(3,0,4)}{5} \text{C.m}$$

   (d) Trouver l'énergie électrostatique potentielle, $\mathcal{E}_e$, du système.

   Solution :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_e &= \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2}\right\|} = -\frac{9 \times 10^9 \times 150 \times 10^{-6} \times 150 \times 10^{-6}}{5} \\ &= -40,5\text{J}\end{aligned}$$

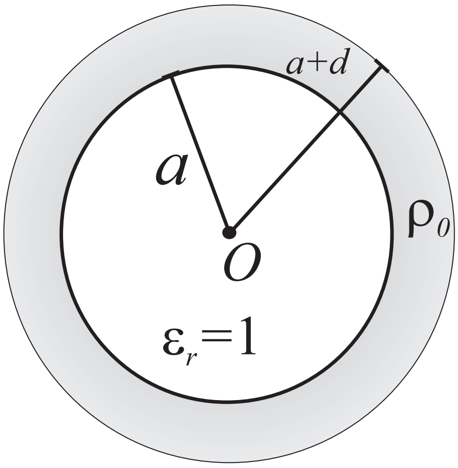

FIGURE 1 – (a) Hémisphère de charge. vide pour $r < a$ et $r > a + d$. ρ_0 pour $a < r < a + d$.

4. (5 pts) On considère une région sphérique vide de centre O et de rayon, a, recouverte d'une couche diélectrique chargée uniformément avec une densité ρ_0 sur une épaisseur d (le tout placé dans le vide). On repère tout point M de l'espace par ses coordonnées sphériques (r, θ, ϕ). On adopte en chaque point le repère $(O, \vec{\boldsymbol{u}}_r, \vec{\boldsymbol{u}}_\theta, \vec{\boldsymbol{u}}_\phi)$.

   (a) Trouver la charge totale, Q_{tot}, de la couche hémisphérique ($a < r < a + d$).
   Solution : La charge totale de la sphère est :

$$Q_{\text{tot}} = \iiint \rho d\mathcal{V} = \frac{4\pi\rho_0}{3}\left[(a+d)^3 - a^3\right]$$

   (b) Justifier à partir de considérations d'invariance et de symétrie de la distribution de charges, que le champ électrostatique créé est de la forme $\vec{\boldsymbol{E}}(M) = E_r(r)\vec{\boldsymbol{u}}_r$. Donner une expression pour $E_r(r)$ dans la région $r < a$.
   Solution : Puisque le champ est radial, on a :

$$\oiint_r \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{d\boldsymbol{S}} = E_r(r)4\pi r^2 \tag{1}$$

   Dans la région $r < a$:

$$E_r(r)4\pi r^2 = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 0 \Longrightarrow E_r(r) = 0 \qquad r < a$$

   Car il n'y a pas de charge dans la région $r < a$, donc $Q_{\text{int}} = 0$.

   (c) Donner une expression pour $E_r(r)$ dans la région $r > a + d$.
   Solution :

$$E_r(r) = \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \qquad r > a + d$$

   (d) Donner une expression pour $E_r(r)$ dans la région $a < r < a + d$.
   Solution :
   La charge à l'intérieur d'une sphère d'une région sphérique de rayon r est :

$$Q_{\text{int}}(< r) = 4\pi \int_a^r r^2 dr = \frac{4\pi\rho_0}{3}\left[r^3 - a^3\right]$$

$$4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q_{\text{int}}(< r)}{\epsilon_0} = \frac{4\pi\rho_0}{3\epsilon_0}\left[r^3 - a^3\right]$$

$$E_r(r) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0}\left[\frac{r^3 - a^3}{r^2}\right]$$

(e) Trouver le potentiel électrique à la surface de l'hémisphère, $V(r = a + d)$, et au centre de la sphère, $V(0)$.

Solution : En principe, le potentiel pour $r > r + d$

$$V(r) - V(\infty) = \int_{\infty}^{r} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{d\boldsymbol{\ell}} = \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0 r}$$

et donc

$$V(r = a + d) = \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0\,(a + d)}$$

puisque $V(r = \infty) = 0$. Puisque, il s'agit d'une charge à symétrie sphérique dans le vide, on aurait pu écrire ce valeur directement. Dans la région $r < a$, V est constant et $V = Cte = V(r = a)$, le potentiel est :

$$V(0) = V(r = a)$$

Comme on connaît $V(a + d)$, il nous faut maintenant calculer :

$$\begin{aligned}
V(a) - V(a + d) &= \int_{a}^{a+d} \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \vec{d\boldsymbol{\ell}} = \int_{a}^{a+d} \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left[\frac{r^3 - a^3}{r^2}\right] dr \\
&= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left\{ \int_{a}^{a+d} r dr - a^3 \int_{a}^{a+d} \frac{dr}{r^2} \right\} \\
&= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left\{ \left[\frac{r^2}{2}\right]_{a}^{a+d} + a^3 \left[\frac{1}{r}\right]_{a}^{a+d} \right\} \\
&= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left\{ \frac{(a + d)^2}{2} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{a + d} - a^2 \right\} \\
&= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left\{ \frac{(a + d)^2}{2} + \frac{a^3}{a + d} - \frac{3}{2}a^2 \right\}
\end{aligned}$$

Enfin, il s'agit maintenant de faire de l'algèbre pour simplifier :

$$\begin{aligned}
V(0) = V(a) =& \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left\{ \frac{(a + d)^2}{2} + \frac{a^3}{a + d} - \frac{3}{2}a^2 \right\} + V(a + d) \\
&= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left[\frac{(a + d)^2}{2} + \frac{a^3}{a + d} - \frac{3}{2}a^2 \right] + \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0\,(a + d)} \\
&= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left[\frac{(a + d)^2}{2} + \frac{a^3}{a + d} - \frac{3}{2}a^2 \right] + \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{(a + d)^3 - a^3}{(a + d)} \\
&= \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \left\{ \frac{(a + d)^2}{2} + \frac{a^3}{a + d} - \frac{3}{2}a^2 + (a + d)^2 - \frac{a^3}{(a + d)} \right\} \\
&= \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \left[(a + d)^2 - a^2 \right]
\end{aligned}$$